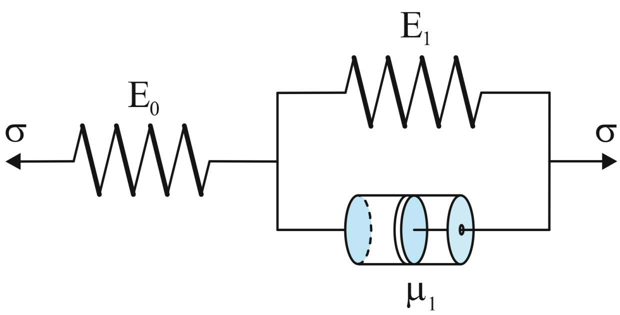
Comportement Mécanique des Matériaux
EPFL - Cours MSE 234, Edition 2025
Exercices des chapitres 5&6

CHAPITRE 5- Les polymères

Exercice 5-1

a – Sur le système de coordonnées ci-dessous, identifiez les axes (quantité rapportée et ses unités) et dessinez les courbes que l'on attend d'un essai de fluage en traction uniaxiale pour (i) un polymère thermodurcissable (thermoset polymer), et (ii) un polymère thermoplastique (thermoplastic polymer).

b – On peut simuler le comportement uniaxial des polymères viscoélastiques linéaires avec des assemblages de pistons et ressorts linéaires. Vous avez vu en cours et en exercice l'assemblage d'éléments composé d'un ressort connecté en parallèle à un piston, le tout étant connecté en série à un second ressort, dit de Voigt-Kelvin et dessiné ci-dessous :

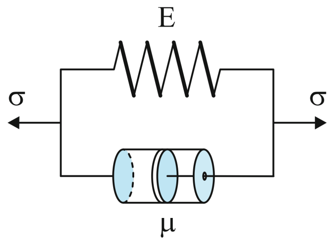


Pourquoi cet assemblage d'éléments de Voigt-Kelvin ne peut-il pas représenter la réponse en fluage d'un polymère thermoplastique ? Que faudrait-il y ajouter pour répliquer un thermoplastique ?

c – Pouvez-vous indiquer et marquer, sur la courbe que vous avez dessinée ci-dessus pour un thermodurcissable en réponse à la question a), trois quantités caractéristiques du matériau et discernables sur sa courbe de fluage qui permettent de déduire, connaissant la contrainte appliquée σ lors de l'essai, les trois quantités E_0, E_1 et μ_1 de l'assemblage de Voigt-Kelvin correspondant à ce polymère thermodurcissable ?

Exercice 5-2

Considérez le modèle simple de Kelvin, utilisé pour simuler la loi de déformation uniaxiale des polymères



Kelvin solid

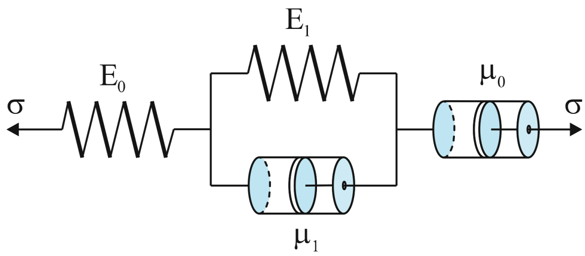
a - Comme vous le voyez, il s'agit d'un piston et d'un ressort, tous deux linéaires, assemblés en parallèle. Montrez que lors d'un essai de fluage la réponse du solide viscoélastique simulée par cet élément est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_o}{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

où $\tau = \mu/E$ et σ_o est la contrainte appliquée.

b – Ce modèle est trop simple pour simuler le comportement des polymères thermoplastiques : pourquoi ?

c – Pour remédier à ce défaut, corriger le fait que le modèle de Kelvin a une rigidité infinie à t = 0 et simuler le comportement des polymères thermoplastiques, on utilise plus souvent le modèle dit à quatre paramètres, où un ressort et un piston linéaires sont ajoutés en série au modèle de Kelvin :



Four parameter fluid

Montrez que sa loi de déformation lors d'un essai de fluage est :

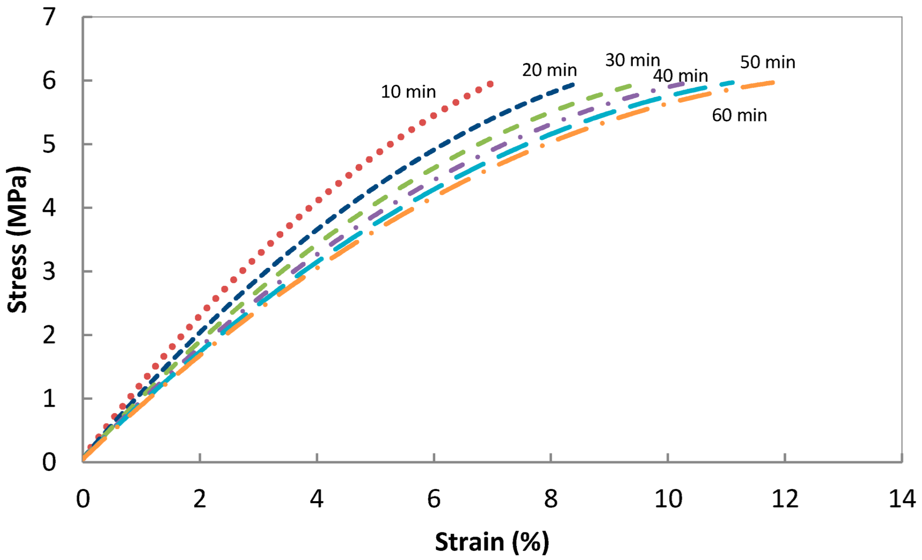
$$\varepsilon(t) = \sigma_o\left[\frac{1}{E_o} + \frac{1}{E_1}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \frac{t}{\mu_o}\right]$$

où $\tau = \mu_1/E_1$ et σ_o est la contrainte appliquée.

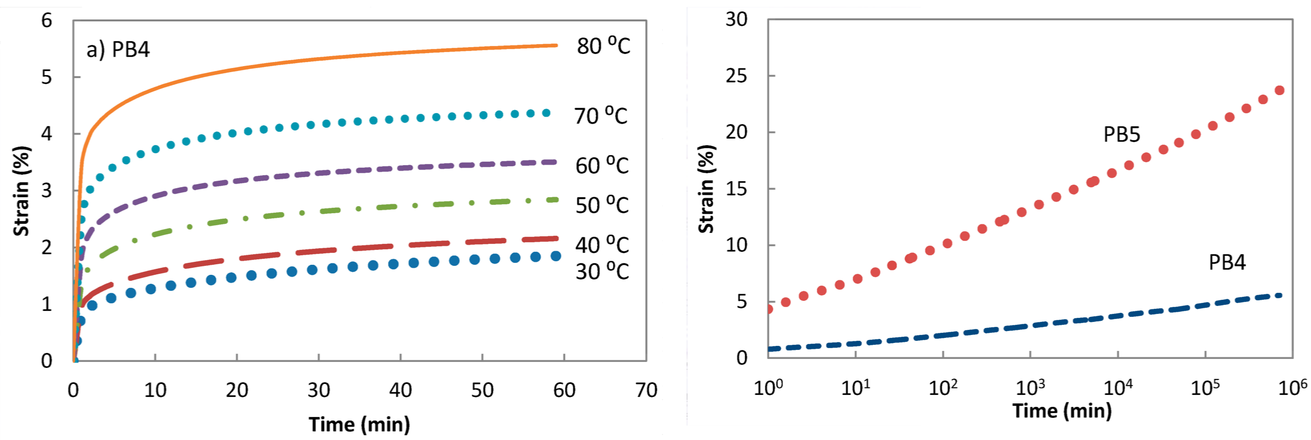
d - Un matériau composé d'une matrice de polyéthylène de faible densité contenant des particules d'élastomère est soumis à une série d'essais de fluage, conduits pour une série de contraintes appliquées allant de 1 à 6 MPa, le tout à température ambiante par les auteurs de la publication scientifique suivante :

F. Daver, M. Kajtaz, M. Brandt, R.A. Shanks, Creep and Recovery Behaviour of Polyolefin-Rubber Nanocomposites Developed for Additive Manufacturing, Polymers 8 (2016) 437. https://doi.org/10.3390/polym8120437.

De ces essais de fluage les auteurs ont tracé un graphe où, pour chacune des contraintes appliquées lors de la série d'essais de fluage, les auteurs ont rapporté les déformations mesurées pour un temps d'essai donné, chaque temps donnant ainsi une courbe déformation-contrainte (dite isochrone).
Pourquoi le modèle à quatre paramètres ci-dessus ne peut-il pas être utilisé pour des contraintes appliquées supérieures à 3 MPa environ avec ce matériau ?



e – Les auteurs ont ensuite conduit une série d'essais de fluage en utilisant une charge appliquée de 1.2 MPa, inférieure à 3 MPa. En faisant varier la température pour un de ces matériaux polymériques (PB4) les courbes de fluage mesurées sont tracées dans le graphe de gauche donné ci-dessous :



Gauche : courbes de fluage, toutes pour une contrainte appliquée de 1.2 MPa, du composite LDPE/élastomère PB4. Droite : « master curve » pour la déformation à cette contrainte de 1.2 MPa et à une température de référence égale à 30°C pour ce matériau (ainsi qu'un autre, PB5), déduite des données de fluage dans le graphe de gauche en utilisant l'hypothèse du « Time Temperature Superposition Principle ».

De ces données les auteurs ont tracé la « master curve » donnée sur la figure de droite, donnant la déformation sous une contrainte de 1.2 MPa (et donc par implication la complaisance, qui n'est autre que le rapport des deux) à une température de référence égale à 30°C pour ce matériau (courbe PB4) en utilisant l'hypothèse du « Time Temperature Superposition Principle ».

Pouvez-vous expliquer avec précision comment les auteurs ont déduit la courbe de droite marquée PB4 à partir des données dans les courbes de gauche sur la base de l'hypothèse TTSP ?

Pour un maximum de clarté, rédigez votre réponse sous forme d'instructions précises écrites pour guider un/une opérateur/trice devant exécuter le travail sans le comprendre.

f – Quelle sera la déformation estimée, selon cette approche, que montrera ce matériau PB4 après avoir été soumis pendant un an à une contrainte de traction fixe de 1.2 MPa à 30°C.

g – Quelle sera la déformation estimée, selon cette approche, que montrera ce matériau PB4 après avoir été soumis pendant un an à une contrainte de traction fixe de 3 MPa à 30°C.

h – Pouvez-vous tracer sur le graphe ci-dessus la Master curve valable à 50°C au lieu de 30°C ?

Exercice 5-3
Le Superplastikium est un polymère thermodurcissable (thermoset) qui se déforme sous une contrainte uniaxiale σ exactement comme le fait le modèle de ressorts et pistons linéaire standard dessiné ci-dessous.

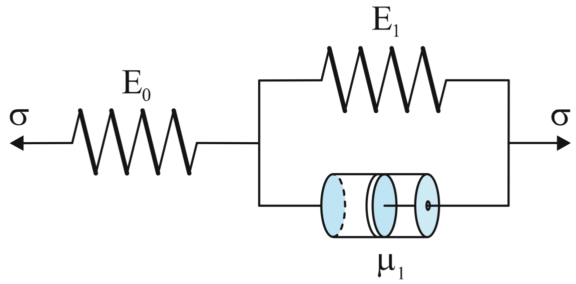


Fig. 5.1 Three-parameter (or Voigt-Kelvin) solid

avec E_0 = 250 MPa, E_1 = 110 MPa et $\mu_1 = 3\cdot10^{10}$ Pa.s.

a - Montrez que la loi de déformation de ce solide obéit à la relation

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\,\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon}$$

Où $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ et $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$, et calculez les valeurs de p_1, q_o et q_1 en fonction de E_0, E_1 et μ_1.

b – Ce matériau viscoélastique est-il viscoélastique linéaire ? Justifiez votre réponse pour obtenir tous les points

c - Ce matériau, initialement non déformé (ε = 0) pour les temps $t < 0$, est soudainement allongé à $t = 0$ lui donner une déformation ε_{fixe}, qui est ensuite maintenue constante pour $t > 0$.
Comment s'appelle ce type d'essai ?

d – Calculez pour cet essai la contrainte σ(*t*) et le module d'Young apparent *E*(*t*) en fonction du temps *t* et de ε_{fixe}, E_0, E_1 et μ_1.

e - Quelle sera la contrainte σ(t) enregistrée lors de cet essai à *t* = 0 et *t* = 100 s si $\varepsilon_{fixe} = 1\%$?

f - À *t* = 100 s la déformation du matériau est subitement ramenée à 0. Calculez σ(t) en fonction du temps *t* et de ε_{fixe}, E_0, E_1 et μ_1 pour *t* > 100 s.

g – L'hypothèse dite du Time Temperature Superposition Principle (TTSP), dit que (cochez la seule réponse valable) :

- o la courbe donnant la rigidité *E* tracée en fonction du temps *t* à deux températures différentes est décrite par la même courbe *E*(t) translatée horizontalement par une constante fonction de la température
- o la courbe donnant la rigidité *E* tracée en fonction du logarithme du temps *t* à deux températures différentes est décrite par la même courbe *E*[log(t)] translatée horizontalement par une constante fonction de la température
- o la courbe donnant la rigidité *E* tracée en fonction du temps *t* à deux températures différentes est décrite par la même courbe *E*(t) translatée verticalement pour se superposer sur une seule courbe dite « Master curve ».

h - Si seul μ_1 est influencé par la température, l'influence de la température sur la rigidité *E*(*t*) de ce polymère mesurée par cet essai de relaxation peut-elle être traitée selon le Time Temperature Superposition Principle ?

Exercice 5-4

La caractérisation du comportement mécanique des polymères est souvent basée sur l'essai de relaxation (relaxation test), décrit par les graphes ci-dessous pour un comportement au-dessus de la température de transition vitreuse (glass transition temperature) T_g :

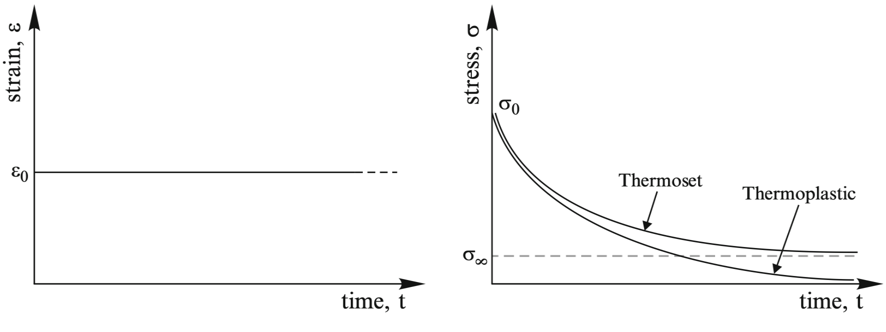


Fig. 3.12 Relaxation test: strain input (*left*) and qualitative stress output (*right*)

a – Quelle est la raison physique, liée à leur structure, pour laquelle dans le graphe ci-dessus on voit cette différence entre un polymère thermoplastique (thermoplastic) et un polymère thermodurcissable (thermoset) ?

b – Pouvez-vous donner la définition du module de relaxation («relaxation modulus») E(t) tel qu'on le déduit de cet essai ?
Le graphe ci-dessous décrit les données fournies par cet essai pour un polymère époxyde donné (c'est le même graphe qui fut donné en cours et dans vos exercices). Notez que les unités S.I. sont sur l'axe des ordonnées de droite, sur laquelle des valeurs détaillées ont été superposées sur l'axe logarithmique pour vous en faciliter la lecture.

Supposez que le comportement de ce polymère obéisse à la viscoélasticité linéaire. Comme on le voit, les données sur ce graphe pour ce polymère sont conformes à l'approche du TTSP («Time-Temperature Superposition Principle»), que l'on pourra donc utiliser pour répondre aux questions ci-dessous.

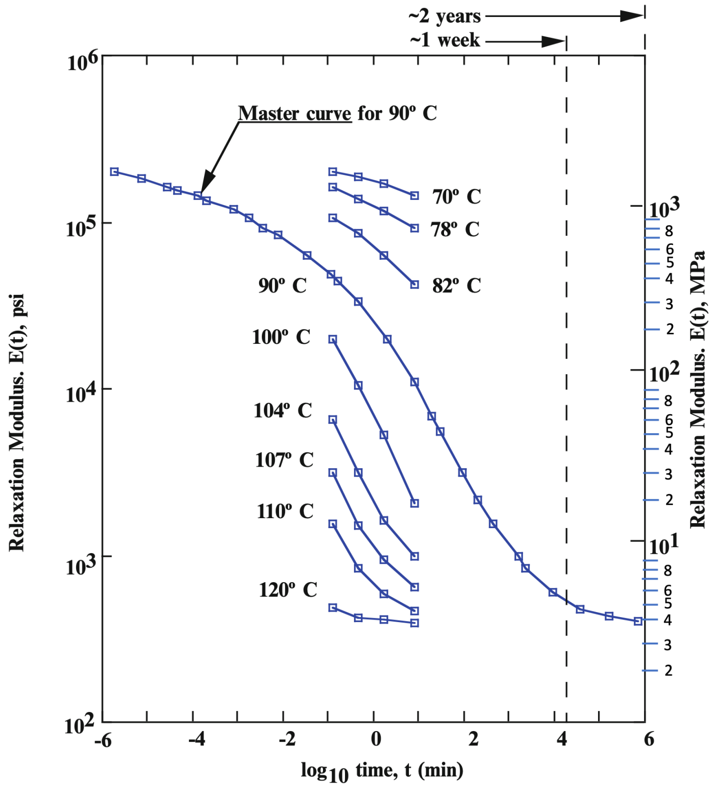


Fig. 7.4 Master curve for a modified epoxy (Data from Cartner 1978)

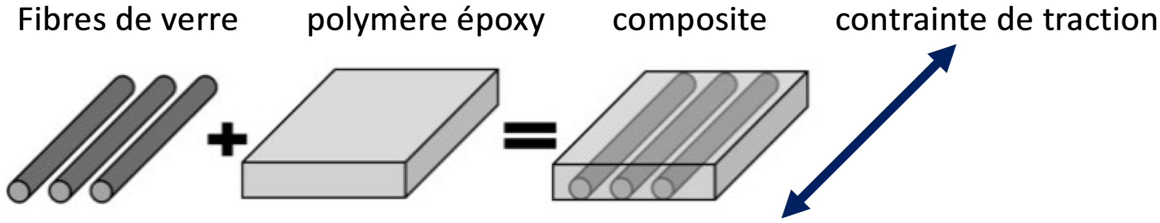
c - Si un échantillon de cet époxy est allongé de 1% à 100°C, quelle est la contrainte appliquée requise une minute après le début de sa déformation ?

d – Si un échantillon de cet époxy est allongé de 1% à 100°C, quelle est la contrainte appliquée requise requise cent minutes après le début de sa déformation ?

CHAPITRE 6 – Composites et matériaux poreux

Exercice 6-1

Considérons un composite à fibres longues sollicité en traction uniaxiale selon l'axe des fibres (voir figure ci-dessous), toutes parallèles et orientées selon l'axe de traction :



Ce composite est composé de

• 50% par volume de fibres de verre longues et parallèles, de module d'Young E = 70 GPa et d'allongement à rupture de ε = 1.5% (elles cassent toutes à cette élongation). Leur déformation est entièrement linéaire élastique.
• 50% par volume d'une matrice polymérique de module d'Young E = 5 GPa et ayant une contrainte d'écoulement σ = 50 MPa lorsque son allongement ε est de 1.5%.

a – Quel est le module d'Young du composite selon la direction parallèle aux fibres ?

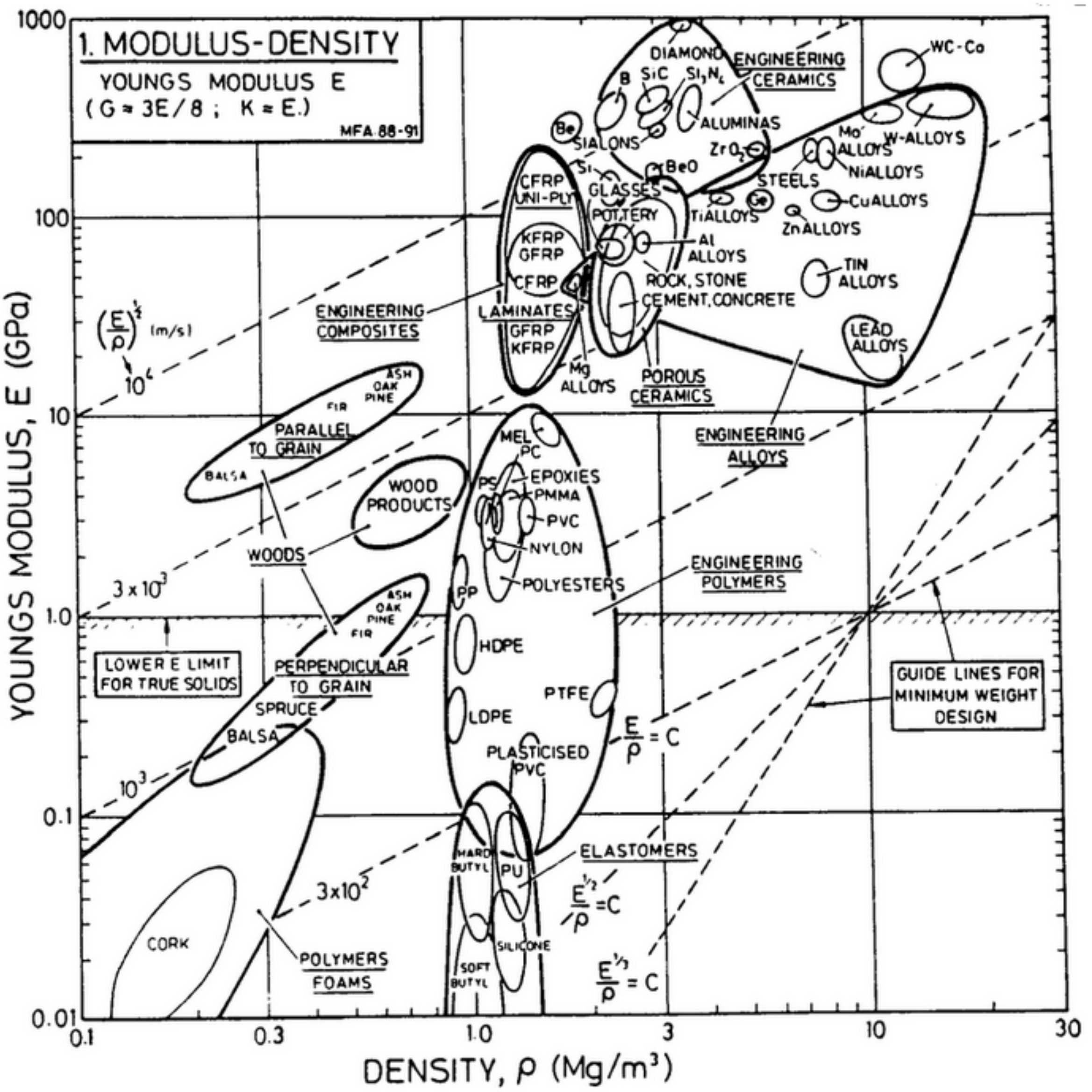
b – Quelle est la contrainte d'écoulement du composite selon la direction parallèle aux fibres à ε = 1.5%, càd au moment où cassent les fibres ?

Exercice 6-2
Dans votre nouveau travail chez Airomnibus en tant qu'ingénieur(e) de fabrication, vous êtes chargé(e) de concevoir une plaque telle que sa rigidité spécifique en flexion soit maximisée. L'indice de choix des matériaux est alors $M_p = E^{1/3}/\rho$, où E est le module d'Young et ρ la densité du matériau. Le graphe en page suivante vous donne ces deux propriétés pour une vaste gamme de matériaux.

a - Quelles sont dans l'ordre de la plus à la moins performante, les trois familles d'alliages métalliques bien connues du monde de l'ingénieur qui sont en tête pour cette application (excluez le béryllium car son oxyde est toxique) ?

b – En utilisant la formule:
$E_{\text{mousse}} = (E_{\text{Al}})(\rho_{\text{mousse}}/\rho_{\text{Al}})^2$,

pouvez-vous dire si une mousse homogène d'aluminium poreux sera plus performante que l'aluminium dense pour cette application ?



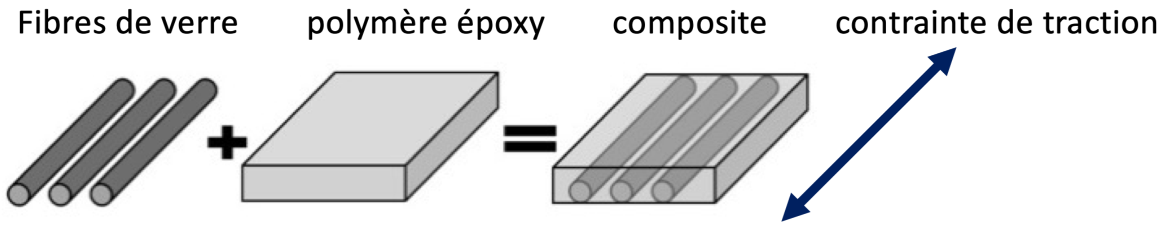
Exercice 6-3

Considérons un composite à fibres longues composé de

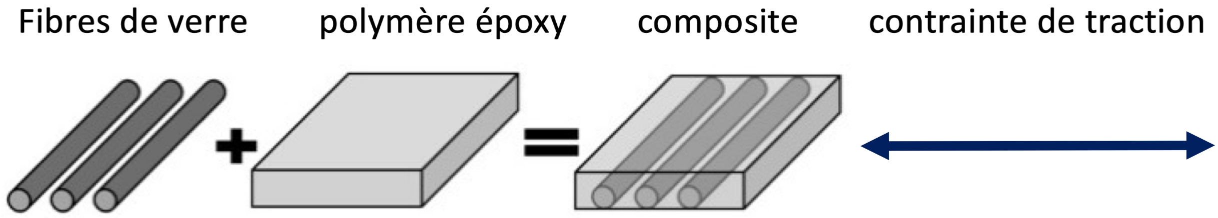
• 25% par volume de fibres de verre longues, de module d'Young E = 70 GPa, toutes parallèles et de :

• 75% par volume d'une matrice polymérique de module d'Young E = 5 GPa puis ayant une contrainte d'écoulement constante σ = 50 MPa lorsque son allongement ε excède 1.5%.

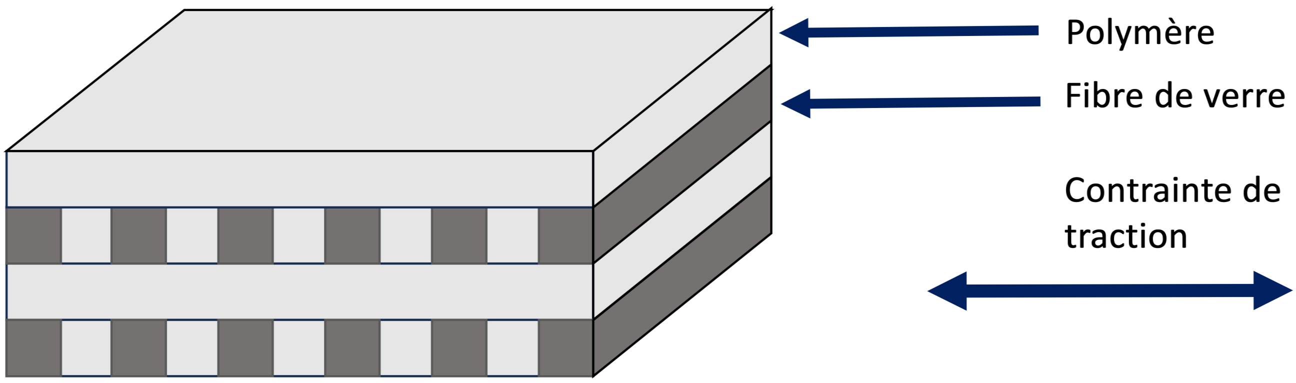
a – Quel est le module d'Young du composite selon la direction parallèle aux fibres ?



On va maintenant estimer le module d'Young du composite dans la direction perpendiculaire aux fibres :



Pour cela on va assimiler le composite à un assemblage de couches successives alternant
(i) une couche d'époxy pur dont la fraction volumique est V_{1E} et
(ii) une couche de composite fait de 50% par volume de fibres de verre à section carrée, séparées par 50% par volume de fibres identiques d'époxy, comme dessiné ci-dessous :



b – Quelle est au sein de cette microstructure modèle du composite la fraction volumique V_{1E} des couches composées uniquement d'époxy pur ?

c - En combinant les lois des mélanges isodéformation et isocontrainte pour la structure décrite ci-dessus, pouvez-vous estimer le module d'Young du composite selon la direction perpendiculaire aux fibres ?

d – Que prédit la loi des mélanges isocontrainte si on l'utilise pour estimer le module d'Young du composite selon la direction perpendiculaire aux fibres et quel commentaire pouvez-vous faire concernant la différence entre cette valeur et l'estimation produite avec le modèle ci-dessus (combinaison des lois des mélanges isodéformation et isocontrainte décrite ci-dessus) ?

Exercice 6-4
Considérons un composite à fibres courtes composé de :

• une fraction volumique V_f de fibres courtes, élastiques linéaires et bien plus rigides que la matrice, toutes parallèles, toutes de même longueur *l* et de diamètre *d*,
entourées par :
• une fraction volumique ($1\text{-}V_f$) de matrice élastomère dont la contrainte d'écoulement uniaxiale (uniaxial flow stress) σ_m à température ambiante T = 293K est donnée par $\sigma_m = 5\,(\varepsilon_m)^{0.1}$ MPa où ε_m est l'élongation uniaxiale (true tensile strain) de la matrice.

Ce composite est soumis à une contrainte de traction σ parallèle aux fibres.

La matrice étant bien plus complaisante que les fibres, elle va se déformer nettement plus que les fibres.
On fait les simplifications (fortes) suivantes :

- Les fibres ne se déforment pratiquement pas, faisant que l'élongation ε_c du composite est ($1\text{-}V_f$) fois celle de sa matrice : $\varepsilon_c = (1\text{-}V_f)\,\varepsilon_m$
- La matrice applique à chaque fibre, le long de l'interface fibre/matrice, une contrainte de cisaillement constante $\sigma_{m,s}$ égale à la moitié de la contrainte moyenne dans la matrice :
  $\sigma_{m,s} = \sigma_m / 2$
  $\sigma_{m,s}$ est orientée vers le bout de fibre le plus proche, comme illustré ci-dessous. Chaque segment de fibre de longueur δx va donc voir une augmentation graduelle, depuis son extrémité vers son centre, de la charge *F* qu'elle porte selon l'axe de la fibre, par la quantité $\delta F = \sigma_{m,s}\,\pi d\,\delta x$;
- à chacun des bouts de la fibre la contrainte portée par la fibre, σ_f est nulle :
  $\sigma_f = 0$ pour $x = 0$ et $x = l$ avec $x = 0$ placé à un bout de la fibre.

La charge axiale portée par la fibre, $F(x)$ a donc le profil en triangle dessiné ci-dessous.

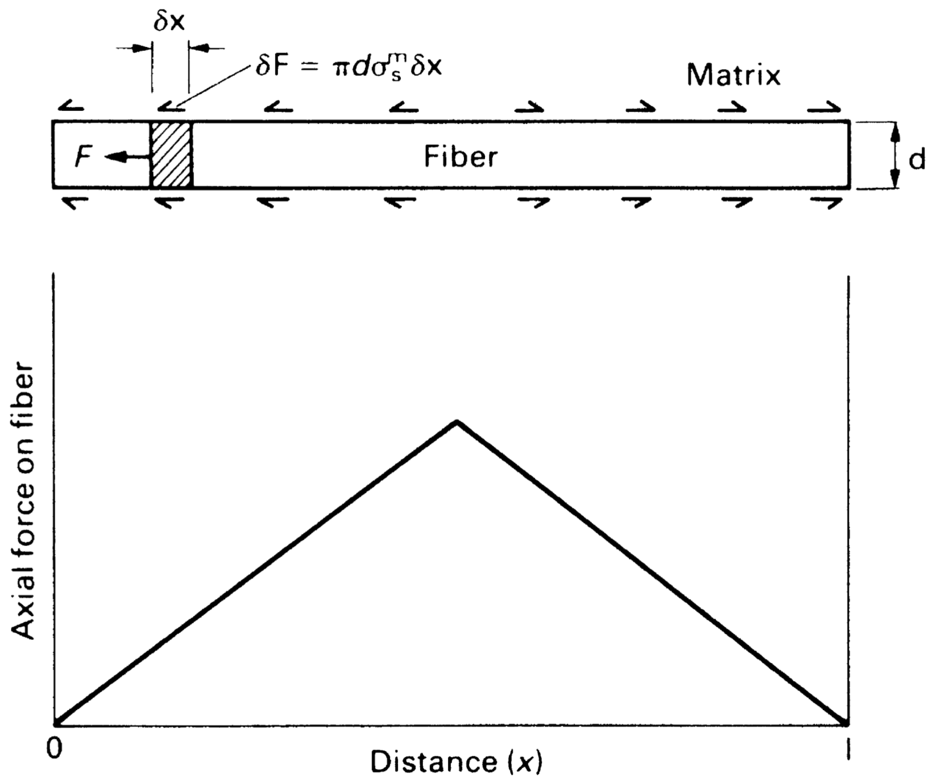


FIGURE 28.4

Load transfer from matrix to fiber causes the tensile stress in the fiber to rise to a peak in the middle.

a – Déduisez la force moyenne $\bar{F}$ portée, quand le composite est allongé parallèlement aux fibres, par chaque fibre selon son axe en fonction de la contrainte moyenne portée par la matrice, σ_m.

b – Connaissant $\bar{F}$, déduisez la contrainte moyenne $\bar{\sigma}_f$ portée par chaque fibre selon son axe, quand le composite est allongé parallèlement aux fibres, par chaque fibre selon son axe en fonction de la contrainte moyenne portée par la matrice, σ_m.

c – Sachant que si V_f est la fraction volumique des fibres la contrainte moyenne portée par le composite est :

$\sigma_{composite} = V_f\, \bar{\sigma}_f + (1-V_f)\, \bar{\sigma}_m$

déduisez la loi de déformation $\sigma_{composite} = F(\varepsilon_c)$ du composite si $V_f = 20\%$ et $l = 20\, d$

d – La loi de déformation de ce composite est-elle élastique ?

e – Si l'élastomère reste intact sans altération de son comportement d'élastomère, quelle sera sa loi de déformation à une température T de 500 K ?

f – Quelle sera alors la loi de déformation du composite de la question (c) à 500 K ?